

Тема № 1. Класичне визначення ймовірності. Елементи комбінаторики

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Теорією ймовірностей називається математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Розглянемо ряд основних понять, на яких вона базується.

Під **випробуванням (експериментом)** розуміють деяку сукупність умов, в яких спостерігається те або інакше явище, фіксується той або інший результат. Дослід може бути повторюваний в однотипних (*незмінних основних*) умовах не обмежене число разів. Комплекс другорядних умов, які неможливо проконтролювати змінюється від випробування до випробування, що приводить до різних результатів наслідків експерименту.

- Випробування – підкидання монети (гральної кістки).
Основні умови – симетричність монети (кістки).
Другорядні – сила кидка, сила вітру, вологість повітря і т.д.

Випадковою подією (подією) називається будь-який факт, який може статися чи не статися в результаті проведення випробування. Випадкові події позначають великими латинськими буквами A, B, C .

Ймовірністю події називається чисельна міра свободи впевненості в появі даної події внаслідок нового випробування.

Ймовірність події A позначається як $P(A)$.

Вірогідною називається подія U , яка внаслідок випробування неодмінно повинна статися.

Для достовірної події $P(U) = 1$.

- Випадання менше семи очок при однократному киданні гральної кістки.

Неможливою називається подія \emptyset , яка внаслідок досвіду не може статися.

Для неможливої події $P(\emptyset) = 0$.

- Випадання семи очок при одному кидку гральної кістки.

Ймовірність будь-якої випадкової події A приймає значення між нулем і одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Повною групою подій називаються декілька подій таких, що внаслідок випробування неодмінно повинна статися хоч би одна з них.

- Поява герба або решки при киданні монети.

Декілька подій в даному досліді називаються **несумісними**, якщо ніякі два з них не можуть з'явитися разом.

- Поява червоної і чорної масті при однократному витягненні карти.

Декілька подій в даному випробуванні називаються **рівноможливими** якщо вони мають рівну міру свободи впевненості в появі внаслідок випробування.

➤ Поява 1,2,3,4,5,6 очок при киданні грального кубика.

Якщо наслідки випробування утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються **випадками**.

Наслідок (випадок) називається **сприятливим подією** A , якщо він спричиняє до обов'язкової появи події A .

➤ При киданні гральної кістки з шести випадків (1,2,3,4,5,6 очок) події A – “поява парного числа очок” сприятливі три випадки: 2,4,6 очок.

1.2 Класичне визначення ймовірності

Якщо результати випробування зводяться до схеми випадків, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де n – загальне число випадків; m – число випадків, сприятливих події A .

Співвідношення (1.1) є **класичною формулою** обчислення ймовірності подій.

Приклад 1. Розглянемо експерименти з киданням гральної кістки. Треба визначити ймовірність випадіння парного числа очок.

Розв'язання. Як випадки при киданні гральної кістки розглядаємо групу подій: випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок. Тоді загальне число випадків в експерименті – шість; число випадків, сприятливих події “парне число очок”, – три: випадіння 2, 4 і 6 очок. Шукана ймовірність $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Приклад 2. Відділ технічного контролю знайшов у партії з 1000 приладів 30 бракованих. Визначити ймовірність виготовлення бракованих виробів.

Розв'язання. Загальне число випадків в експерименті – 1000; число випадків, сприятливих події “виготовлення бракованих виробів” – 30. Шукана ймовірність $P(A) = \frac{30}{1000} = 0,03$.

1.3 Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, що вивчає розташування, впорядкування, вибір і розподіл елементів з фіксованої множини.

При великому числі можливих наслідків випробування процедури прямого перебору можливих варіантів малоефективне. На допомогу приходять комбінаторні методи, в основі яких лежать два наступних правила.

Правило додавання. Якщо дві *взаємовиключні* дії можуть бути виконані відповідно n_1 та n_2 способами, тоді якусь одну з цих дій можна виконати $n_1 + n_2$ способами.

Приклад 3. З міста А в місто В можна добратися 4 потягами, 2 літаками, 6 автобусами. Скількома способами можна добратися з міста А у місто В.

Розв'язання. Проїзд з А у В на потягу, літаку або автобусом є *взаємовиключними* операціями, тому загальну кількість маршрутів можна одержати як суму способів пересування, тобто $N = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 6 = 12$ способів.

Правило множення. Нехай дві виконувані одна за одною дії можуть бути здійснені відповідно n_1 та n_2 способами. Тоді обидві вони можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2$ способами.

Приклад 4. У чемпіонаті країни з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

Розв'язання. $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

Приклад 5. Скільки сигналів можна подати з корабля за допомогою чотирьох прапорів різного кольору, розміщуючи їх на щоглі, якщо використовувати різну кількість прапорів?

Розв'язання. Сигнали можна подавати чотирма, трьома, двома і одним прапорами. Відповідно до правила множення, кількість можливих способів подачі сигналу з 4 прапорів складе $n_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способів, для сигналу з 3 прапорів — $n_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способів, для сигналу з 2 прапорів маємо $n_3 = 4 \cdot 3 = 12$, а для сигналу з 1 прапора $n_4 = 4$ способа. Загальну кількість сигналів можна одержати як суму способів для сигналів з 4, 3, 2 і 1 прапорів, тобто $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 24 + 24 + 12 + 4 = 60$ способами.

Обидва правила узагальнюються на випадок будь-якої скінченної кількості дій.

У комбінаториці розрізняють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів фіксованої множини: перестановки, розміщення, сполучення.

Перестановками з m елементів називаються такі їх сукупності, що відрізняються одна від іншої тільки порядком входження елементів:

$$P_m = m!. \quad (1.2)$$

При цьому $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$.

Приклад 6. Скільки різних тризначних чисел можна скласти за допомогою трьох карток з цифрами 1, 2, 3?

Розв'язання. Загальна кількість можливих тризначних чисел дорівнює $P_3 = 3! = 6$.

Легко помітити, що такий же результат можна одержати, застосовуючи правило множення.

Розміщеннями з n елементів по m називаються такі сукупності m елементів, що відрізняються одна від іншої принаймні одним елементом або порядком їх входження ($m \leq n$) :

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} . \quad (1.3)$$

Приклад 7. Скільки різних двозначних чисел можна скласти за допомогою трьох карток

з цифрами 1, 2, 3?

Розв'язання. Загальна кількість можливих двозначних чисел визначається відповідно до виразу : $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Сполученнями з n елементів по m називаються такі сукупності m елементів, що відрізняються одна від іншої принаймні одним елементом ($m \leq n$) :

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} . \quad (1.4)$$

При цьому $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 8. Скількома способами можна вибрати дві цифри з трьох 1, 2, 3?

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів вибору цифр дорівнює $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$.

Розглянемо наступні прикладі комбінаторних задач.

Приклад 9. Кидають дві гральні кісткі. Яка ймовірність події: A –сума випавших очок дорівняє 5; B – добуток випавших очок дорівняє 8; C – сума 5, а добуток 8 очок.

Розв'язання. Загальне число можливих наслідків випробування $n = 36$, оскільки кожна кістка має 6 наслідків і кожний наслідок однієї кістки може поєднуватися з 6 наслідками іншої кістки. Всі наслідки складають повну групу несутісних рівноможливих подій.

Сприятливими події A є наступні наслідки: 1+4; 2+3; 3+2; 4+1, тобто $m = 4$. Шукана ймовірність, згідно з формулою (1), $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Сприятливими події B є два наслідки: 2×4; 4×2, тобто $m = 2$. Згідно з формулою (1.1) $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Сприятливих події C наслідків – немає, тобто $m = 0$, та $P(C) = 0$.

Приклад 10. З п'яти букв розрізної азбуки складене слово «КНИГА». Дитина, яка не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у неї знову вийшло слово «КНИГА».

Розв'язок. З п'яти букв можна скласти різні буквосполучення, що відрізняються одне від одного тільки порядком букв, тому число всіх наслідків випробування обчислимо як число перестановок з 5 елементів: $n = P_5 = 5! = 120$. Всі наслідки утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, з яких тільки одна сприятлива появі події A – відновленню слова «КНИГА». Отже шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

Приклад 11. Те ж питання, якщо було складене слово «МОЛОКО».

Розв'язок. Загальне число наслідків випробування $n = P_6 = 6! = 720$, число сприятливих наслідків $m = P_3 = 3! = 6$, так як букви «О», що повторюються, можна дозвоільно переставляти між собою. Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$.

Приклад 12. В ящику 100 деталей, з них 10 – браковані. Наугад витягнуто 4 деталі. Знайти ймовірність події A – наявності серед витягнутих деталей рівно трьох стандартних.

Розв'язання. Загальне число можливих наслідків випробування $n = C_{100}^4$. Всі вони утворюють повну групу несумісних рівно можливих подій. Підрахуємо число сприятливих наслідків. Три стандартні деталі з 90, що є в ящику, можна витягнути C_{90}^3 способами. З кожною отриманою вибіркою з 3 стандартних деталей може поєднуватися одна нестандартна деталь з 10 що є C_{10}^1 способами.

Отже, $m = C_{90}^3 \cdot C_{10}^1$, а $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = 0,3$.

Приклад 13. Повна колода з 52 карт ділиться наздогад на дві рівні пачки по 26 карт. Знайти ймовірності наступних подій: A – в кожній з пачок виявиться по два тузи; B – в одній з пачок не буде жодного туза, а в іншій – всі чотири; C – в одній з пачок буде один туз, а в іншій – три.

Розв'язання. Загальне число наслідків випробування $n = C_{52}^{26}$. Число наслідків, сприятливих події A , $m = C_4^2 \cdot C_{48}^{24}$, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0109$.

Подія B може здійснитися двома способами: або в першій пачці будуть всі чотири тузи, а в другій – жодного, або навпаки:

$P(B) = \frac{2C_4^4 \cdot C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0031$. Аналогічно $P(C) = \frac{2C_4^3 \cdot C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0139$.

Приклад 14. На десяти картках написані цифри 0, 1, ..., 9. Три з них вибирають наздогад і укладаються на стіл в порядку появи. Знайти ймовірність того, що: а) вийде число 523 (подія A); б) з вибраних цифр можна скласти число 523 (подія B).

Розв'язання. Загальне число всіх можливих наслідків випробування

$n = A_{10}^3 = 720$, так як отримані з'єднання елементів можуть відрізнятися один від одного або самими елементами, або порядком їх слідування. Всі наслідки утворюють повну групу несумісних рівно можливих подій. Із загального числа наслідків тільки один сприятливий отриманню числа 523, тобто $m=1$. Тоді шукана ймовірність події A , згідно з формулою (1), $P(A) = \frac{1}{720}$.

Для події B загальне число наслідків випробування $n = C_{10}^3 = 120$, оскільки порядок появи елементів не відіграє ролі (елементи можна міняти місцями за умовою). Шукана ймовірність $P(B) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$.

Приклад 15. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три людини. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірності наступних подій: A – всі пасажери вийдуть на четвертому поверсі; B – всі пасажери вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі); C – всі пасажери вийдуть на різних поверхах.

Розв'язання. Загальне число можливих наслідків випробування, $n = 6^3 = 216$, $P(A) = \frac{1}{216}$. Ймовірність події B у шість разів більше ймовірності події A , так як поверхів, на яких можна вийти, шість; $m=6$, і $P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. Для події C число способів, якими можна розподілити трьох пасажирів по шести поверхах, дорівнює $m = C_6^3 = 20$, $P(C) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$.

Задачі для самостійного розв'язання

- 1.1. Скількома способами можна розташувати на полиці в ряд три різні книги?
- 1.2. Скількома способами можна розсадити за круглим столом п'ять гостей на 5 стільцях?
- 1.3. Скількома способами можна призначити трьох чоловік на три різні посади?
- 1.4. У вагоні трамваю 15 двомісних крісел. Скількома способами на них можуть розміститися 30 пасажирів?
- 1.5. Скільки різних тризначних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5?
- 1.6. На станції є 8 запасних шляхів. Скількома способами на них можна розставити три різних потяги?
- 1.7. Група з 8 чоловік вибирає делегацію на збори у складі трьох чоловік. Скільки різних варіантів делегації можна скласти?
- 1.8. Скількома способами можна з групи в 25 чоловік призначити:
 - а) три людини на рівноцінні посади;
 - б) чотири людини на різні посади?
- 1.9. Команду з восьми чоловік розбивають на дві групи з рівною кількістю людей. Скількома способами можна це зробити?

1.10. Скількома різними способами можна розкласти в дві кишені 10 монет різної вартості по рівній кількості монет?

1.11. Номер автомобіля складається з двох букв, за якими слідує тризначне число. Скільки існує різних автомобільних номерів?

1.12. Знайти кількість можливих номерів, якщо в номері:

- а) 2 букви і 4 цифри;
- б) 3 букви і 4 цифри;
- в) одночасно використовуються номери обох типів.

1.13. При передачі повідомлень по телеграфу використовують код Морзе. Вказати:

- а) чи достатньо комбінацій, що складаються не більше ніж з п'яти символів, щоб закодувати будь-яке повідомлення на російській мові;
- б) чи достатньо для цього комбінацій, що складаються не більше ніж з чотирьох символів?

1.14. Скільки чотиризначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1,2,3,4,5 якщо:

- а) ніякі цифри не повторюються більше одного разу;
- б) повторення цифр допустимі;
- в) числа повинні бути непарними, без повторень цифр.

1.15. З пункту А в пункт Б ведуть 4 дороги, а з Б у В сім доріг. Скільки існує маршрутів пройти:

- а) з А у В;
- б) з В в А;
- в) з А у В і назад;
- г) з А у В і назад, якщо повертатися потрібно новим шляхом?

1.16. Скільки сигналів можна подати за допомогою 6 прапорців різного кольору?

1.17. Скільки натуральних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб перша цифра була 1, друга – 2 і щоб отримані числа ділилися на 5?

1.18. Біжать 8 спортсменів. Знайти кількість варіантів:

- а) розподіли на фініші;
- б) утворити трійку призерів;
- в) скласти трійку нагороджених золотою, срібною і бронзовою медалями.

1.19. Кидають дві монети. Яка ймовірність того, що:

- а) тільки на одній випаде "решка";
- б) принаймні на одній випаде "герб"?

1.20. Кидають дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що:

- а) сума випавших очок рівна семи;
- б) різниця випавших очок рівна трем;
- в) сума рівна семи, а різниця трьом;
- г) сума рівна семи, якщо відомо, що різниця рівна трьом.

1.21. Кубик, всі грані якого забарвлені розпиляний так, що кожне його ребро розділено на 10 частин. З одержаної безлічі кубиків наугад вибирають один. Яка ймовірність того, що в нього забарвлені:

- а) три грані;
- б) дві грані;
- в) одна грань;
- г) принаймні одна грань;
- д) чотири грані;
- е) не менше двох граней;
- ж) не більше двох граней

1.22. На п'ятьох картках написані літери О, П, Р, С, Т. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію картках можна буде прочитати слово "СПОРТ"?

1.23. На шістьох картках написані літери М, О, О, О, Л, К. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію картках можна буде прочитати слово "МОЛОКО"?

1.24. У шухляді змішані 6 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних літер: А, А, А, Н, Н, С. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово "АНАНАС"?

1.25. На п'ятьох картках написані літери К, М, Н, І, Т. Виймають навмання 3 картки. Яка ймовірність того, що а) у порядку виходу карток утвориться слово "КІТ", б) з вийнятих карток можна скласти слово "КІТ"?

1.26. З 4 карток з літерами А, Б, В, Г виймають навмання 2 картки. Знайти ймовірність того, що літери на картках виявляться сусідніми за абеткою.

1.27. З 10 карток з цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вибирають навмання три. Яка ймовірність того, що а) у порядку вибору цифр утвориться число 327; б) можна буде скласти число 327; в) можна буде скласти число 323?

1.28. З 10 карток з цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вибирають навмання дві. Яка ймовірність того, що утворенне число ділиться на 18?

1.29. На п'яти картках цифри: 1, 2, 3, 4, 5. Дві з них, одна за одною виймаються. Знайти ймовірність того, що число на другій картці буде більше ніж на першій.

1.30. На п'яти картках цифри 1, 2, 3, 4, 5. Дві з них одна за одною виймають. Знайти ймовірність того, що число на другій картці буде більше ніж на першій

1.31. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи тільки, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

1.32. У контейнері 10 ламп, чотири з яких несправні. Навмання виймають одну лампу, яка ймовірність того, що вона буде несправна?

1.33. У коробці лежат 3 білих і 4 чорних шари. Навмання виймають один за одним два шари. Знайти ймовірність того, що вибрана різнокольорова пара шарів.

1.34. На п'яти однакових кулях написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Кулі перемішали. Яка ймовірність того, що виймаючи три кулі одна за одною, одержимо всі три непарні номери.

1.35. В академічній групі 25 студентів, з них 15 дівчат. Яка ймовірність того, що серед перших 6 студентів, які зайшли до аудиторії, буде 4 дівчини?

1.36. В академічній групі 25 студентів. У трьох студентів прізвище починається на літеру "А", у двох – на "О", в одного – на "І", в інших – на приголосну. Викладач навмання викликає одного студента. Яка ймовірність того, що його прізвище починається на приголосну?

1.37. З гаманця, в якому 5 монет по п'ять копійок, 3 монети по три копійки і 2 монети по дві копійки, виймають навмання три монети. Знайти ймовірність того, що:

- а) всі три монети по п'ять копійок;
- б) всі монети різної вартості;
- в) всі монети однакової вартості;
- г) одна монета дві копійки і дві монети по три копійки.

1.38. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді на 25 з 30 питань програми. Екзаменатором були задані три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповідь на:

- а) всі питання;
- б) тільки перше питання;
- в) тільки два питання;
- г) не більше два питань;
- д) не менше два питань;
- е) принаймні одне питання.

1.39. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. Яка ймовірність, що граючий викреслить 6 з 6 виграшних чисел?

1.40. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. Яка ймовірність, що граючий викреслить 3 з 6 виграшних чисел?

1.41. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. У випадку, якщо граючий викреслить 3, 4, 5 або 6 з 6 виграшних чисел, він одержує грошовий виграш. Яка ймовірність одержання грошового виграшу?

1.42. Після того, як вісім стрільців однієї кваліфікації провели залп по мішені, в ній виявилось 5 пробоїн. Знайти ймовірність того, що перший і другої стрільці влучили в мішень.

1.43. На чотирьох картках цифри 1, 2, 3, 4. Три з них одна за одною виймають. Знайти ймовірність того, що цифри цифри з'являться в порядку зростання.

1.44. Четверо друзів випадково сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи виявляться поряд.

1.45. З колоди для преферансу, що містить 32 карти, навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що нею опиниться "дама", "король" або "валет"?

1.46. Троє гравців грають в карти. Кожному здано по 10 карт, дві карти залишені в прикупі. Один з гравців бачить, що в нього на руках 6 карт бубнової

масті і 4 не бубнової. Він скидає дві карти з цих чотирьох і бере собі прикуп. Знайти ймовірність того, що він прикупить дві бубнові карти.

1.47. Повна колода карт (52) ділиться навмання на дві рівні частини. Знайти ймовірність подій:

- а) у кожній пачці по два тузи;
- б) в одній з пачок не буде жодного туза, а в іншій – всі чотири;
- в) в одній з пачок буде один туз, а в іншій три.

1.48. У розиграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд з яких випадковим чином формуються дві групи по 9 команд в кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірність подій:

- а) всі команди екстракласу потраплять в одну групу;
- б) дві команди екстракласу потраплять в одну з груп, а три в іншу.

1.49. У барабані револьвера сім кубел, з них в п'яти патрони, два – порожні. Барабан обертається, і робиться постріл. Знайти ймовірність того, що, повторивши досвід двічі:

- а) обидва рази пострілу не було;
- б) обидва рази відбувся постріл.

1.50. Чотири кульки випадковим чином розкидається по чотирьох лунках. Кожна кулька потрапляє в ту або іншу лунку з однаковою ймовірністю і незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що в одній з лунок опиниться три кульки, в іншій – одна, а в решті двох лунок кульок не буде.

Тема № 2. Основні теореми теорії ймовірностей

2.1 Алгебра випадкових подій

Випадкові події можуть бути простими й складними. Складні події являють собою суму або добуток простих подій.

Сумою двох подій A і B називають подію, що перебуває в появі хоч би однієї з подій A або B .

➤ Випробування – кидок гральної кістки;

A – випало 2 очки; B – випало непарне число очок $\{1,3,5\}$;

$C = A + B = \{1,2,3,5\}$.

Добутком двох подій A і B називають подію C , що перебуває в спільній появі подій A і B .

➤ Випробування – кидок гральної кістки;

A – випало 3 очки; B – випало непарне число очок $\{1,3,5\}$;

$C = A \cdot B = \{3\}$.

Поняття суми і добутку подій можуть бути узагальнені на випадки будь-якого числа подій.

З визначення операцій додавання і множення слідує співвідношення:

- 1) $A+A=A$; $A \cdot A=A$;
- 2) $A+U=U$; $A \cdot U=A$;
- 3) $A+\emptyset=A$; $A \cdot \emptyset=\emptyset$;
- 4) $A+B=B+A$; $A \cdot B=B \cdot A$;
- 5) $(A+B)+C=A+(B+C)$; $(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$;
- 6) $A(B+C)=A \cdot B+A \cdot C$.

2.2 Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. Ймовірність суми двох подій рівна сумі їх ймовірностей мінус ймовірність добутку цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B). \quad (2.1)$$

У разі *несумісних* подій ймовірність їх суми визначається за формулами:

$$P(A+B)=P(A)+P(B); \quad (2.2)$$

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n) \text{ — для } n \text{ подій.} \quad (2.3)$$

Подія \bar{A} , яка полягає в тому, що подія A не станеться, називають **проти-лежною** події A . Події A та \bar{A} утворюють *повну групу* несумісних подій $\bar{A}+A=U$. Сума ймовірностей протилежних подій рівна одиниці:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \quad (2.4)$$

➤ Випробування – витягання карти.

A – поява картки червоної масті, \bar{A} – поява картки чорної масті.

Події A і B називаються **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них *не залежить* від здійснення іншої.

➤ Випробування – послідовне кидання двох монет.

Розглядають події:

A – випадання герба на першій монеті;

B – випадання хоч би однієї цифри;

C – випадання герба на другій монеті.

Події A і B залежні. Події A і C незалежні.

Умовною ймовірністю $P(B/A)$ називається ймовірність події B , яка знайдена за умовою здійснення події A .

Для незалежних подій $P(B/A)=P(B)$; $P(A/B)=P(A)$.

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої при умові, що перша подія сталася:

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A)=P(B) \cdot P(A/B). \quad (2.5)$$

У разі *незалежних* подій формула (6) спрощується:

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)=P(B) \cdot P(A) \text{ — для двох подій } A \text{ і } B; \quad (2.6)$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad - \text{ для } n \text{ подій.} \quad (2.7)$$

Приклад 1. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,7; з другої – 0,8. Знайти ймовірність ураження цілі при одному залпі з двох гармат.

Розв'язання. Введемо позначення. Нехай A – подія, яка полягає в попаданні в ціль першої гарматою; B – другою. Події, що розглядаються є сумісними й незалежними. Отже подія C (ураження цілі при залпі) є сумою двох сумісних подій, ймовірність події C можна визначити за формулою (2.1)

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

Дану задачу можна розв'язати ще іншим способом.

Ціль буде уражена, якщо станеться одна з трьох несумісних подій: $A_1 \cdot \bar{A}_2$ – в ціль попала перша гармата і не попала друга; $\bar{A}_1 \cdot A_2$ – в ціль не попала перша гармата і попала друга; $A_1 \cdot A_2$ – в ціль попали обидві гармати. У цьому випадку, застосовуючи теорему про суму несумісних подій у формулі (2.3), отримаємо

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= 0,7 \cdot (1-0,8) + (1-0,7) \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,94. \end{aligned}$$

Самий простий спосіб розв'язання задачі полягає в поданні ймовірності події C через ймовірність протилежної події – промах обох гармат:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - (1-0,7)(1-0,8) = 0,94.$$

Приклад 2. Стрілець робить 3 постріли по одній мішені. Ймовірність влучення в кожному пострілі однакова і дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішені буде:

- а) ні одної пробоїни;
- б) одна пробоїна;
- в) дві пробоїни;
- г) три пробоїни.

Розв'язання. а) Позначимо A_1 – влучення при першому пострілі, A_2 – влучення при другому пострілі, A_3 – влучення при третьому пострілі. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні, тому подія A (ні одної пробоїни) являє собою добуток трьох залежних подій:

$$A = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3, \quad P(A) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1-0,9)^3 = 0,001;$$

б) подія B – одна пробоїна :

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3, \quad P(B) = 3 \cdot 0,9 \cdot 0,1^2 = 0,027;$$

в) подія C – дві пробоїни:

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \quad P(C) = 3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,243;$$

г) подія D – три пробоїни^

$$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \quad P(D) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0,9^3 = 0,729.$$

Приклад 3. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді на 15 з 20 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент відповість на три заданих екзаменатором запитання.

Розв'язання. Подія C (студент знає відповіді на всі три запитання) являє собою добуток трьох залежних подій: A_1 (студент знає відповідь на перше запитання); A_2 (студент знає відповідь на друге запитання при умові, що він відповів на перше); A_3 (студент знає відповідь на третє при умові, що він відповів на перше і друге). Обчислимо ймовірності цих подій: $P(A_1) = \frac{15}{20}$; $P(A_2 / A_1) = \frac{14}{19}$; $P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{13}{18}$.

За теоремою про ймовірність добутку:

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = 0,368.$$

Приклад 4. (Задача була запропонована І.Ньютону С.Пірсом в 1693 р.). Гравець кидає шість гральних кісток і виграє, якщо випадає хоч би одна одиниця. Гравець кидає дванадцять гральних кісток і виграє, якщо випадуть хоч би дві одиниці. У кого більше ймовірність виграти?

Розв'язання. Обчислимо ймовірність виграшу для першого гравця: подія A – при киданні шести гральних кісток випадає одиниця; A_i – випадання одиниці при кидку однієї гральної кістки;

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 \bar{A}_6, \quad P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6, \quad P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651.$$

Обчислимо ймовірність виграшу для другого гравця: подія B – при киданні дванадцяти гральних кісток випадає хоч би дві одиниці:

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 1 - \frac{17}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0,6187; \quad P(A) > P(B).$$

Отже, ймовірніше виграти хоч би одну одиницю при киданні чотирьох гральних кісток.

Приклад 5. (“Парадокс де Мере”. Придворний кавалер і азартний гравець шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програшах). Довести, що більш ймовірно при підкиданні чотирьох гральних кубиків одержати принаймні одну одиницю, ніж при 24 підкиданнях двох кубиків одержати принаймні один раз дві одиниці.

Розв'язання. Відповідні ймовірності дорівнюють:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914, \quad P(A) > P(B)$$

Отже, ймовірніше виграти хоч би одну одиницю при киданні чотирьох гральних кісток.

2.3 Моделі надійності технічних систем

Під **надійністю технічної системи** розуміється ймовірність її безвідмовної роботи за певний період часу T .

Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють визначати ймовірність безвідмовної роботи системи за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.

Залежно від способу з'єднання елементів розрізняють системи з

- 1) *послідовним*;
- 2) *паралельним*;
- 3) *змішаним з'єднанням* елементів.

Послідовне з'єднання елементів системи. Для безвідмовної роботи системи, безумовно необхідна безвідмовна робота всіх елементів системи, відмовлення системи **настає** тоді, коли відмовляє хоча б один елемент системи.

Приклад 6. Розглянемо систему з послідовним з'єднанням n елементів. Кожному i -му елементу поставлена у відповідність ймовірність її безвідмовної роботи p_i . Будемо вважати, що система розбита на елементи так, що відмова будь-якого з них ні в якому разі не впливає на відмову інших елементів.



Рис. 2.1

Розв'язання. Позначимо:

C – система працездатна за деякий період часу T ;

A_1 – працездатний 1-ий елемент системи протягом часу T ;

A_2 – працездатний 2-ий елемент протягом часу T ;

A_i – працездатний i -ий елемент системи протягом часу T .

Ймовірність події A_i дорівнює $P(A_i) = p_i$.

Вся система працездатна тільки тоді, коли працездатні всі її елементи, тобто

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_i \cdot \dots \cdot A_n = \prod_{i=1}^n A_i.$$

Оскільки всі події A_i між собою незалежні, то ймовірність події C визначиться за формулою

$$P(C) = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (2.8)$$

Паралельне з'єднання елементів системи. Відмова системи з паралельним з'єднанням елементів настає тоді, коли відмовляють одночасно всі елементи. Система вважається працездатною, якщо працездатний хоча б один елемент системи.

Приклад 7. Розглянемо систему з паралельним з'єднанням n елементів.

Розв'язання. Позначимо:

C – система працездатна за деякий період часу T ; \bar{C} – система відмовила;
 A_i – безвідмовна робота i -го елемента системи; \bar{A}_i – відмова i -го елемента.

Вся система буде непрацездатна тільки тоді, коли будуть непрацездатні всі її елементи, тобто

$$\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_i \cdot \dots \cdot \bar{A}_n = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

Оскільки всі події \bar{A}_i між собою незалежні, то ймовірність події \bar{C} визначиться за формулою

$$P(\bar{C}) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

Шукану ймовірність працездатності системи знайдемо за формулою

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (2.9)$$

Аналіз моделі показує, що оскільки добуток $\prod_{i=1}^n (1 - p_i) \rightarrow 0$, то при $n \rightarrow \infty$, ймовірність безвідмовної роботи системи $P(A) \rightarrow 1$. Таким чином, введення в систему додаткових паралельних гілок сприяє підвищенню надійності системи.

Змішане з'єднання елементів системи

Приклад 8. Реальні технічні системи, як правило, мають змішане з'єднання елементів, тобто являють собою складні комбінації послідовних і паралельних з'єднань. Розглянемо систему зі змішаним з'єднанням 6 елементів. Кожному i -му елементу поставлена у відповідність ймовірність її безвідмовної роботи p_i .

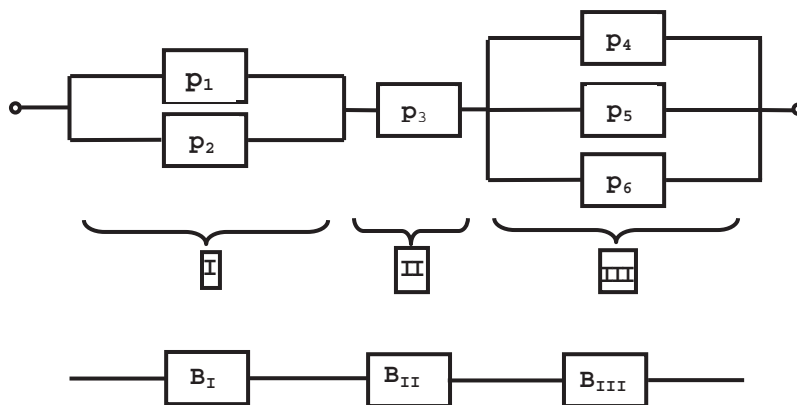


Рис. 2.3

Розв'язання. Позначимо:

C – система працездатна за деякий період часу T ;

\bar{C} – система відмовила;

A_i – безвідмовна робота i -го елемента системи;

\bar{A}_i – відмова i -го елемента.

B_I – безвідмовна робота i -го блока системи;

$$\bar{B}_I = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2, \quad P(\bar{B}_I) = \prod_{i=1}^2 (1 - p_i), \quad P(B_I) = 1 - P(\bar{B}_I) = 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - p_i),$$

$$B_{II} = A_3, \quad P(B_{II}) = p_3,$$

$$\bar{B}_{III} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3, \quad P(\bar{B}_{III}) = 1 - P(B_{III}) = 1 - \prod_{i=4}^6 (1 - p_i),$$

$$C = B_I \cdot B_{II} \cdot B_{III}, \quad P(C) = P(B_I \cdot B_{II} \cdot B_{III}) = (1 - \prod_{i=1}^2 (1 - p_i)) \cdot p_3 \cdot (1 - \prod_{i=4}^6 (1 - p_i)).$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Знайти ймовірність появи кольорової кулі, якщо в урні міститься 10 червоних, 5 синіх і 15 білих куль.

2.2. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі 0,4. Робиться 3 постріли. Яка ймовірність, що буде:

- а) тільки одне влучення;
- б) хоча б одне влучення.

2.3. Кинуто дві гральні кістки. Чому рівна ймовірність того, що хоча б на одній з них випаде 5 очок?

2.4. В одному ящику 10 стандартних і 3 нестандартні деталі, в іншому 12 стандартних і 4 нестандартних. Виймається навмання з кожного ящика по одній деталі. Яка ймовірність, що:

- а) обидві деталі стандартні;
- б) обидва нестандартні;
- в) з першого ящика стандартна, з другого нестандартна;
- г) одна стандартна;
- д) хоча б одна стандартна?

2.5. Ймовірність ураження цілі при одному пострілі 0,7. Стрільба ведеться до першого влучення, але не більше п'ять пострілів. Яка ймовірність того, що буде витрачено:

- а) два снаряди;
- б) чотири снаряди;
- в) п'ять снарядів?

2.6. Стрілець вибиває 10, 9, 8 очок з ймовірністю відповідно 0,1, 0,3 і 0,2. Зроблено три постріли. Знайти ймовірність подій:

- а) всі кулі влучили в 10;
- б) всі кулі влучили в 9;
- в) жодна куля не влучила в 10;

г) жодного разу не було вибито більше 8 очок.

2.7. Винищувач веде стрільбу по наземній цілі трьома незалежними чергами. Для ураження цілі достатньо попадання одного снаряда в цілі. Ймовірність влучення одним снарядом в першій черзі рівна 0,2, в другій 0,3, в третій 0,4. Знайти ймовірність ураження цілі.

2.8. Група винищувачів атакує ланку бомбардувальників. Ймовірність знищення одного бомбардувальника рівно 0,5, двох – 0,25, трьох – 0,15. Визначити ймовірність того, що:

- а) буде збитий хоча б один бомбардувальник;
- б) буде збито не менше два бомбардувальників.

2.9. Ймовірність виявлення цілі при одному польоті 0,8. Визначити ймовірність того, що буде потрібно не менше чотирьох польотів над ціллю.

2.10. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

2.11. Ймовірність одного влучення в цілі при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність ураження цілі при одному пострілі першою з гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

2.12. Ймовірність хоча б одного влучення в цілі при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення в цілі при одному пострілі.

2.13. Ймовірність хоча б одного влучення стрільцем в цілі при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення в цілі при одному пострілі.

2.14. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого рівна 0,7, для другого 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один стрілець.

2.15. Два стрільці одночасно стріляють по одній мішені, роблячи по одному пострілу. Ймовірність одного влучення в мішень при цьому рівна 0,42. Визначити ймовірність влучення в мішень при одному пострілі другим стрільцем, коли відомо, що для першого ця ймовірність рівна 0,6.

2.16. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому, третьому довідниках, відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься:

- а) тільки в одному довіднику;
- б) тільки в двох довідниках;
- в) у всіх трьох довідниках;
- г) у жодному довіднику.

2.17. На складі 15 однотипних агрегатів, 5 з них мають дефекти. Із складу одержано 3 агрегати. Визначити ймовірність того, що хоча б один з одержаних із складу агрегатів буде з дефектом.

2.18. З колоди, що містить 52 картки, виймають наугад три картки. Витягнуті картки в колоду не повертаються. Знайти ймовірність того, що серед них не буде ні одного туза.

2.19. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирають наздогад одну, а з тих, що залишилися, другу. Знайти ймовірність того, що буде вибрана непарна цифра:

- а) перший раз;
- б) другий раз;
- в) обидва рази.

2.20. При одному циклі огляду радіолокаційної станції ціль виявляється з ймовірністю 0,7. Виявлення цілі в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що при 5 циклах ціль буде виявлена.

2.21. Ймовірність того, що в електричному ланцюгу напруження перевищить номінальне значення, дорівнює 0,15. При підвищеному напруженні ймовірність аварії приладу споживача електричного струму дорівнює 0,85. Визначити ймовірність аварії приладу внаслідок підвищення напруження.

2.22. В ящику серед 100 однакових на вигляд деталей 80 стандартних. Із ящика взято дві деталі. Знайти ймовірність можливих при цьому наслідків.

2.23. Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її на вмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж в три місця.

2.24. Ймовірність влучення в ціль при скиданні бомби дорівнює 0,7. Ймовірність того, що бомба не вибухне, дорівнює 0,08. Знайти ймовірність руйнування об'єкта, якщо буде скинута одна бомба.

2.25. У мішку змішані 30% катушок з нитками білого кольору і 70% – червоного. Знайти ймовірність того, що вибрані наздогад дві катушки будуть з нитками одного кольору.

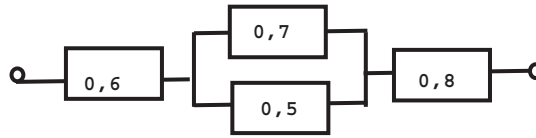
2.26. З урни, що містить кулі з номерами 1, 2, ..., 9, послідовно витягують дві кулі, причому перша куля повертається, якщо його номер не рівний одиниці. Знайти ймовірність того, що куля з номером 3 буде витягнута при другому витягненні.

2.27. У пачці 8 патронів, 2 зіпсовані. Навмання вибираються 3 патрони і проводиться стрільба. Визначити ймовірність того, що при стрільбі відбудеться 2 постріли.

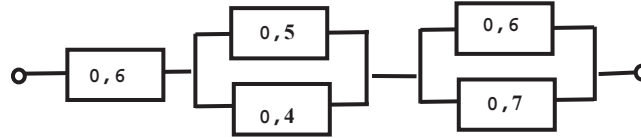
2.28. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить у ціль, рівна 0,4. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з ймовірністю не менше 0,9 він влучив у ціль принаймні один раз?

2.29. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у десятку рівна 0,6. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб хоча б раз влучить у десятку з ймовірністю не меншою 0,8?

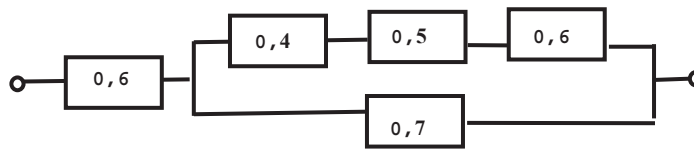
2.30. Визначити надійність технічної системи, зображеної на рисунку, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.



2.31. Визначити надійність технічної системи, зображеної на рисунку, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.



2.32. Визначити надійність технічної системи, зображеної на рисунку, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.



Тема № 3. Формула повної ймовірності і формула Бейеса

3.1 Формула повної ймовірності

Наслідком обох основних правил теорії ймовірностей – правила додавання і правила множення – є формула повної ймовірності.

Нехай в умовах досвіду подія A з'являється спільно з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), відомі апіорні ймовірності $P(H_i)$ кожної гіпотези й умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, тоді ймовірність події A визначається за **формулою повної ймовірності**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad (3.1)$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези H_i ; $P(A/H_i)$ – умовна ймовірність події A при здійсненні гіпотези H_i .

Приклад 1. Є 15 екзаменаційних білетів, кожний з яких має по два питання. Студент знає відповіді на 25 запитань. Знайти ймовірність того, що екзамен буде зданий, якщо для цього досить відповісти на обидва запитання свого білета або на одне запитання з свого білета і на одне (за вибором викладача) запитання з додаткового білета.

Розв'язання. Визначимо події: гіпотеза H_1 – студент знає обидва запитання свого білета; гіпотеза H_2 – студент з двох запитань свого білета знає один.

$$P(H_1) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29}; \quad P(H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} = \frac{250}{870} = \frac{25}{87};$$

Умовні ймовірності події A : $P(A / H_1) = 1$, $P(A / H_2) = \frac{24}{28}$.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot 1 + \frac{25}{87} \cdot \frac{24}{28} = \frac{190}{203}.$$

3.2 Формула Бейеса

Якщо відомі апіорні (до випробування) ймовірності гіпотез і відомо, що подія A сталася, то апостеріорні (після випробування) ймовірності гіпотез $P(H_i / A)$, ($i=1, 2, \dots, n$) обчислюють за **формулою Бейеса**:

$$P(H_j / A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A / H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Формула Бейеса дає можливість переглянути ймовірності гіпотез з урахуванням отриманого результату експерименту.

Приклад 2. На склад надходить продукція трьох фабрик, причому частка продукція першої фабрики становить 20%, другий – 40%, третьої – 30%. Відомо також, що середній відсоток нестандартних виробів для першої фабрики становить 1%, другий – 2%, третьої – 3%. Знайти ймовірність того, що: а) наугад взятий виріб виявиться нестандартним; б) виріб виготовлений на першій фабриці, якщо воно виявилось нестандартним.; в) на якій фабриці найвірогідніше був виготовлений виріб, якщо воно виявилось стандартним?

Розв'язання. а) визначимо події: A – наздогад взятий виріб виявиться нестандартним; гіпотеза H_1 – наздогад взятий виріб виготовлений на першій фабриці; гіпотеза H_2 – на другій фабриці; гіпотеза H_3 – на третій фабриці. Всі гіпотези несумісні і складають повну групу. Ймовірність кожної гіпотези визначається перекладом процентної частки продукції відповідної фабрики в безрозмірну величину, тобто діленням на 100%. Так, $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,4$; $P(H_3) = 0,3$. Аналогічно визначають умовні ймовірності події A : $P(A / H_1) = 0,01$; $P(A / H_2) = 0,02$; $P(A / H_3) = 0,03$. Тепер, використовуючи формулу (9), можна отримати шукану повну ймовірність події A :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A / H_i) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3) = \\ &= 0,2 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 = 0,019; \end{aligned}$$

б) відомо, що подія A вже сталася. Треба знайти апостеріорну ймовірність гіпотези H_1 .

Шукану ймовірність знайдемо за формулою Бейеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,01}{0,019} \approx 0,1053;$$

в) щоб визначити, на якій фабриці найвірогідніше був виготовлений стандартний виріб, необхідно порівняти між собою всі апостеріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1 / A)$, $P(H_2 / A)$, $P(H_3 / A)$. За умовою задачі виріб виявився стандартним, тобто сталася подія \bar{A} .

Події A і \bar{A} є протилежними. З вирахуванням (2.4)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,019 = 0,981.$$

Обчислюємо умовну ймовірність події \bar{A} при умові, що підтвердилася гіпотеза H_1 :

$$P(\bar{A} / H_1) = 1 - P(A / H_1) = 1 - 0,01 = 0,99,$$

$$P(\bar{A} / H_2) = 1 - P(A / H_2) = 1 - 0,02 = 0,98, \quad P(\bar{A} / H_3) = 1 - P(A / H_3) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

За формулою Бейеса:

$$P(H_1 / \bar{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\bar{A} / H_1)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2 \cdot 0,99}{0,981} \approx 0,2018,$$

$$P(H_2 / \bar{A}) = \frac{0,4 \cdot 0,98}{0,981} \approx 0,3996, \quad P(H_3 / \bar{A}) = \frac{0,3 \cdot 0,97}{0,981} \approx 0,2966.$$

Найбільшою апостеріорною ймовірністю має друга гіпотеза. Отже стандартний виріб ймовірніше всього був виготовлений на другій фабриці.

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. У лабораторії є 6 комп'ютерів першого типу і 4 другого типу. Ймовірність того, що під час деякого розрахунку комп'ютер не вийде з ладу, рівна 0,95 для першого типу і 0,8 для другого типу. Студент проводить розрахунок на навмання вибраному комп'ютері. Знайти ймовірність того, що до закінчення розрахунку ПК не вийде з ладу.

3.2. В ящику міститься 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей, виготовлених на заводі №2 і 18 деталей, виготовлених на заводі №3. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі №1, відмінної якості, рівна 0,9, для деталей, виготовлених на заводі №2 – 0,6 і на заводі №3 – 0,9. Знайти ймовірність того, що витягнута навмання деталь виявиться відмінної якості.

3.3. По літаку робиться три одиночні постріли. Ймовірність попадання при першому пострілі 0,5, при другому 0,6, при третьому 0,8. Для виведення літака з ладу достатньо трьох влучень. При одному попаданні літак виходить з ладу з ймовірністю 0,3, при двох – 0,6. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів літак буде збитий.

3.4. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих, в другій урні 20 куль, з них 4 білих. З кожної урни навмання витягнули по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання взяли одну кулю. Знайти ймовірність того, що взята біла куля.

3.5. Є дві урни. У першій 3 білих і 4 чорні кулі, у другій - 6 білих і 3 чорні кулі. З першої урни в другу перекладають 5 куль, після чого з другої урни виймають одну кулю. Визначити ймовірність того, що вона виявиться білою.

3.6. Батарея з трьох гармат зробила залп, при цьому 2 снаряди потрапили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата дала промах, якщо ймовірність влучення в ціль для першої гармати дорівнює 0,4, для другої – 0,3, для третьої – 0,5.

3.7. Числа вантажних машин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажна машина, рівна 0,1, а легкова – 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

3.8. Серед 10 стрільців – два майстри спорту, які вражають 10 мішеней з 10; один першорозрядник, який вражає 9 з 10; чотири другорозрядники, які вражають 8 з 10; три новачки, вражають по 7 мішеней з 10. Яка ймовірність того, що викликаний наздогад стрілець вразить підряд 3 мішені? Яка ймовірність того, що постріл зробив першорозрядник, якщо той, що стріляв вразив 3 мішені?

3.9. На склад поступає продукція трьох фабрик, причому продукція першої складає 20%, другий 46% і третьої 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних деталей для першої фабрики рівний 3%, другої – 2%, третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виготовлен на першій фабриці, якщо він виявився стандартним.

3.10. Текст програми складається з 55 букв, 30 цифр і 15 спеціальних символів. Ймовірність помилки при введенні програми рівна 0,02 для будь-якої букви, 0,01 для будь-якої цифри і 0,08 для будь-якого спеціального символу. Знайти ймовірність безпомилкового введення навмання взятого символу програми. Знайти ймовірність того, що введена цифра, якщо введення пройшло без помилки.

3.11. У піраміді п'ять гвинтівок, три з яких обладнані оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95, для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде вражена, якщо стрілець зробить один постріл з навмання обраної гвинтівки.

3.12. У групі спортсменів 20 лижників, 6 ковзанярів і 4 фігуристи. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму дорівнює: для лижника – 0,9, для ковзаняра – 0,8, для фігуриста – 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний спортсмен виконає норму.

3.13. Третя частина однієї з трьох партій є другосортною, інші деталі у всіх партіях – першого сорту. Деталь, взята з однієї партії, виявилася першосортною. Знайти ймовірність того, що деталь була взята з партії, що має другосортні деталі.

3.14. Ймовірність вступу до інституту випускника середньої школи рівна 0,6, технікуму – 0,7, підготовчого відділення – 0,8. Серед кожних 100 абітурієнтів – 50 випускників середньої школи, 25 – технікумів і 25 – підготовчих відділення. Випадково вибраний абітурієнт вступив до інституту. Яка ймовірність того, що абітурієнт був випускником: а) середньої школи; б) технікуму; в) підготовчого відділення?

3.15. Точки і тире в телеграфному коді викривляються незалежно один від одного з однаковою ймовірністю 0,15. Знайти ймовірність того, що: а) слово з чотирьох символів передане без викривлення; б) в слові з трьох символів викривлено не більше двох символів.

3.16. У піраміді десять гвинтівок, чотири з яких обладнані оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілець уразив мішень з навання обраної гвинтівки. Що імовірніше: стрілець стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом або без нього?

3.17. На трьох дочок – Іру, Олену, Машу в сім'ї покладений обов'язок мити посуд. Оскільки Іра старша, їй доводиться виконувати 40% всієї роботи. Інші 60% роботи доводяться порівну на Олену і Машу. Ймовірність що-небудь розбити з посуду під час одного миття для Іри, Олени і Маші відповідно дорівнює 0,02; 0,03; 0,04. Батьки не знають, хто чергував увечері, але вони чули дзвін розбитого посуду. Яка ймовірність того, що посуд мила: а) Іра; б) Олена; в) Маша?

3.18. З першого верстата на зборку поступає 40% всіх деталей, з другого – 30%, з третього – 20%, з четвертого – 10%. Серед деталей з першого верстата – 0,1 бракованих, з другого – 0,2%, з третього – 0,25%, з четвертого – 0,5%. На зборку поступила бракована деталь. Яка ймовірність того, що вона поступила з другого верстата?

3.19. Електронний пристрій складається з 8 блоків, 3 з яких відмовляють з ймовірністю 0,1, а інші з ймовірністю 0,15. Яка ймовірність відмови навання вибраного блоку?

3.20. Серед N екзаменаційних білетів n ($n < N$) «щасливих». Два студентів підходять за білетами один за іншим. Визначити, у кого із студентів: у першого або у другого, буде більше ймовірність узяти «щасливий» білет.

Тема № 4. Повторення експерименту

4.1 Формула Бернуллі

Випробування називаються *незалежними*, якщо ймовірність того або іншого наслідку випробування не залежить від того, які наслідки мали інші випробування.

Незалежні випробування можуть проводитися як в однотипних умовах, так і в різних. У першому випадку ймовірність появи якоїсь події A у всіх випробування одна і та ж, у другому випадку вона міняється від досліду до досліду.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 \leq p \leq 1$), подія A наступить рівне k разів (байдуже в якій послідовності), визначається за формулою:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} . \quad (4.1)$$

Приклад 1. Проводиться 5 пострілів по мішені з ймовірністю улучення кожного 0,7. Яка ймовірність того, що буде: а) точно 3 влучення; б) не менше за 4 влучень; в) не більше за 3 влучень.

Розв'язок. а) проводиться $n = 5$ незалежних випробувань з ймовірністю улучення в мішень в кожному з них $p = 0,7$. Ймовірність того, що буде точно $k = 3$ влучення, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,7^3 (1-0,7)^2 = 0,3087 .$$

б) подію A , яка полягає в тому, що при 5 пострілах буде не менше за 4 влучень, можна розглядати як суму двох несумісних подій: B – 4 влучення з 5 і C – 5 влучень з 5.

$$P(B) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,7^4 (1-0,7)^1 = 0,36015; \quad P(C) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,7^5 (1-0,7)^0 = 0,16807.$$

Тоді $P(A) = P(B) + P(C) = 0,36015 + 0,16807 = 0,52822$;

в) міркуючи аналогічно, ймовірність події – не більше трьох влучень при п'яти пострілах можна обчислити, як суму ймовірностей чотирьох несумісних подій:

$$P(A) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) .$$

Однак, події A (не більше трьох влучень при п'яти пострілах) і (не менше чотирьох влучень при п'яти пострілах) протилежні один одному, тому $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,52822 = 0,47178$.

4.2 Локальна теорема Лапласа

Якщо кількість незалежних випробувань досить велика, замість формули Бернуллі треба користуватися локальною і інтегральною теоремами Лапласа, які дають приблизний результат, але він тим ближче до результату точної формули Бернуллі, чим більше кількість випробувань.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 \leq p \leq 1$), подія наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності), приблизно рівна (тим точніше, ніж більше n):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (4.2)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ – аргумент функції Гаусса;

$q = (1-p)$ – ймовірність протилежної події.

Властивості функції $\varphi(x)$:

- 1) функція $\varphi(x)$ – парна, $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 2) $\forall |x| > 4, \varphi(x) = 0$.

У Додатку наведена таблиця значень функції $\varphi(x)$ від позитивного аргументу x (табл. 1).

Теорему Лапласа рекомендується застосовувати при $npq > 9$.

Приклад 2. Є 50 лунок, по яких випадковим чином розкидають 20 кульок. Кожна кулька з однаковою ймовірністю може попасти в будь-яку лунку. Знайти ймовірність того, що в дану лунку попаде рівно одна кулька.

Розв'язання. а) за умовою задачі проводиться $n = 20$ незалежних кидків кульок з однаковою ймовірністю попадання при кожному кидку $p = \frac{1}{50} = 0,02$. Ймовірність попадання в лунку рівно одної кулі при 20 кидках можна обчислити за допомогою формули Бернуллі, але при $n > 10$ це приведе до невиправдано великих обчислень. Скористаємося локальною теоремою Лапласа:

$P_{20}(1) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$. Для цього заздалегідь обчислимо вирази:

$\sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot 0,02 \cdot (1-0,02)} = 0,626$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1-20 \cdot 0,02}{0,626} \approx 0,96$. За табл. 1 (див. Додаток таблиця 1) знайдемо значення функції $\varphi(0,96) = 0,2516$. Знайдемо шукану ймовірність:

$$P_{20}(1) = \frac{\varphi(0,96)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,2516}{0,626} \approx 0,4.$$

4.3 Формула Пуассона

Якщо ймовірність p появи події A в окремому випробуванні близька до нуля, то навіть при великих n значення ймовірності, обчислюване за локальною теоремою Лапласа, виявляється недостатньо точним. В таких випадках використовують формулу, одержану Пуассоном.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, але мала, число незалежних випробувань n достатньо ве-

лике, а $\lambda = np < 10$, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A наступить рівно k разів приблизно рівна

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (4.3)$$

где $\lambda = np$.

Для формули Пуассона наведені таблиці значень функції $P_n(k)$ (дів. Додаток таблиця 3).

Приклад 3. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі рівна 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться 5 нестандартних.

Розв'язання. Маємо $n=1000$, $p=0,004$, тобто виконані вимоги теореми Пуассона $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4 < 10$. За таблицею функції Пуассона (див. Додаток таб.3) при $k=5$ одержимо:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = P_{1000}(5) \approx 0,1563.$$

Знайдемо ймовірність тієї ж події за локальною теоремою Лапласа.

Маємо $n=1000$, $p=0,004$, $k=5$,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5 - 1000 \cdot 0,004}{\sqrt{1000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} = \frac{1}{1,996} = 0,501, \quad \phi(0,501) = 0,3519.$$

Шукана ймовірність:
$$P_{1000}(5) = \frac{\phi(0,501)}{1,996} = \frac{0,3519}{1,996} \approx 0,1763.$$

Точне значення надає формула Бернуллі:

$$P_{1000}(5) = C_{1000}^5 \cdot 0,004^5 \cdot 0,996^{995} \approx 0,1552.$$

Таким чином, у даному випадку формула Пуассона дає набагато більш точне наближення, ніж формула Лапласа.

4.4 Інтегральна теорема Лапласа

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 \leq p \leq 1$), подія наступить не менше k_1 разів і не більше k_2 разів (байдуже в якій послідовності), приблизно рівна (тим точніше, чим більше n):

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4.4)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – інтегральна функція Лапласа;

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ і $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – аргументи інтегральної функції розподілу;

$q = (1 - p)$ – ймовірність протилежної події.

Властивості функції $\Phi(x)$:

- 1) функція $\Phi(x)$ – непарна, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 2) $\forall |x| > 5, \Phi(x) = 0,5$.

У Додатку наведена таблиця значень функції $\Phi(x)$ від позитивного аргументу x (табл. 2).

Приклад 4. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах, мішень буде вражена: а) рівно 75 разів; б) не менше 75 разів.

Розв'язання. а) за умовою задачі проводиться $n = 100$ незалежних випробувань з ймовірністю появи події в кожному $p = 0,8$. Визначимо шукану ймовірність за допомогою локальної теореми Лапласа. Для цього заздалегідь обчислимо вирази: $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot (1-0,8)} = 4$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100 \cdot 0,8}{4} = -1,25$. Внаслідок парності функції Гаусса $\phi(-1,25) = \phi(1,25) = 0,1826$. Шукана ймовірність:

$$P_{100}(75) = \frac{\phi(-1,25)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,1826}{4} = 0,0456.$$

б) скористаємося інтегральною теоремою Лапласа при $n = 100$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 100$:

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2) &= P(75; 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0,8}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0,8}{4}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1,25). \end{aligned}$$

Оскільки $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то $\Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25)$, а потім по табл. 2 (див. Додаток) знайти відповідні значення функції. У результаті отримаємо:

$$P_{100}(75; 100) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,4999997 + 0,3944 \approx 0,8944.$$

Приклад 5. Ймовірність відвідування студентом будь-якої лекції за курсом "Теорія ймовірностей" дорівнює $p = 0,9$. Визначити ймовірність відвідування студентом не менше 12 лекцій з 16 запланованих у семестрі, якщо ймовірність його появи на будь-якій лекції складає 0,9.

Розв'язання. За умовою задачі проводиться $n = 12$ незалежних випробувань з ймовірністю появи події в кожному $p = 0,9$. Визначимо шукану ймовірність за допомогою інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = P_{16}(12, 16) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12 - 16 \cdot 0,9}{\sqrt{16 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{-2,4}{1,2} = -2; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 16 \cdot 0,9}{\sqrt{16 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{1,6}{1,2} = 1,33,$$

$$P_{16}(12; 16) = \Phi(1,33) + \Phi(2) = 0,1647 + 0,4082 = 0,5729.$$

Таким чином, шукана ймовірність $P_{16}(12;16) = 0,5729$.

4.4 Найвірогідніше число здійснення події

При розв'язанні задач, пов'язаних з формулами Бернуллі і Лапласа, часто використовують поняття *найвірогідніше число здійснення подій*. Якщо в кожному з n незалежних випробуваннях події з'являється з однаковою ймовірністю p ($0 \leq p \leq 1$), то *найвірогідніше число здійснення* події k_0 в цих випробуваннях (байдуже в якій послідовності) визначається за допомогою двійчастої нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p, \quad \text{де } q = 1 - p. \quad (4.5)$$

Приклад 6. Ймовірність того, що пасажир спізниться до відправлення поїзда, дорівнює 0,02. Знайти найвірогідніше число запізнених з 855 пасажирів.

Розв'язання. Проводять $n = 855$ незалежних випробувань, ймовірність появи події A (спізнення пасажирів до відправлення поїзда) в кожному з них однакова ($p = 0,02$). Найвірогідніше число здійснення події A потрібно визначити за нерівністю (14):

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_0 \leq np + p; \\ 855 \cdot 0,02 - 0,98 &\leq k_0 \leq 855 \cdot 0,02 + 0,02; \\ 16,12 &\leq k_0 \leq 17,12. \end{aligned}$$

Найвірогідніше число здійснення подій – це ціла величина. Тому шукане число $k_0 = 17$.

Приклад 7. Скільки треба взяти деталей, щоб найвірогідніше число придатних було рівно 20, якщо ймовірність того, що навання взята деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1?

Розв'язання. Ймовірність того, що деталь є придатною, визначимо як ймовірність протилежної події: $p = 1 - 0,1 = 0,9$. Для визначення шуканої величини n (загальна кількість деталей, серед яких найвірогідніше знаходиться 20 придатних) скористаємося формулою найвірогіднішого числа здійснення подій (14), підставивши в неї $k_0 = 20$ і $p = 0,9$:

$$n \cdot 0,9 - 0,1 \leq 20 \leq n \cdot 0,9 + 0,9.$$

Розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} n \cdot 0,9 + 0,9 - 1 \leq 20; \\ 20 \leq n \cdot 0,9 + 0,9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \cdot 0,9 \leq 20,1; \\ n \cdot 0,9 \geq 19,1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 22,3; \\ n \geq 21,2; \end{cases} \quad \text{отримаємо шукане рішення}$$

$n = 22$.

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Стрілець влучає в мішень при одному пострілі з ймовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що на п'ять пострілів припадуть:

- а) три влучення;
- б) не менше трьох влучень;
- в) хоча б одне влучення.

4.2. У сім'ї 5 дітей. Знайти ймовірність того, що в сім'ї:

- а) 2 хлопчики;
- б) не менше 2-х хлопчиків;
- в) не менше 2-х і не більше 4-х хлопчиків?

4.3. Гральна кістка кинута 4 рази. Яка ймовірність того, що 6 очок випаде три рази?

4.4. Робиться 5 пострілів з ймовірністю влучення в кожному 0,7. Визначити ймовірність того, що буде не менше 2-х влучень.

4.5. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що ймовірніше: виграти дві партії з чотирьох або три партії з шести (нічий до уваги не приймаються)?

4.6. Ймовірність відмови будь-якої з 8 однакових мікросхем в блоці рівна 0,02. Знайти ймовірність того, що:

- а) відмовило не більше 2-х мікросхем;
- б) всі мікросхеми справні.

4.7. Кубик кинутий 4 рази. Знайти ймовірність того, що:

- а) шестірка випала хоча б один раз;
- б) шестірка випала не більше двох разів;
- в) двічі випало число очоків, не менше п'яти.

4.8. Ймовірність народження хлопчика рівна 0,515. Яка ймовірність того, що серед 10 новонароджених буде:

- а) 4 дівчинки?
- б) не менше за 7 хлопчиків?

4.9. Відрізок АВ довжиною 15 см роздільний точкою С відносно 2:1. На цей відрізок навздогад кинута 4 точки. Знайти ймовірність того, що дві з них виявляться лівіше точки С й дві – правіше. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

4.10. Відрізок роздільний на 4 рівні частини. На відрізок навздогад кинута 8 точок. Знайти ймовірність того, що на кожному з чотирьох частин попаде по дві точки. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

4.11. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена:

- а) рівно 75 разів;

б) не менше 75 разів;

в) знайти то найвірогідніше число влучень у мішень.

4.12. Ймовірність того, що пасажир спізниться до відправлення поїзда рівна 0,02. Знайти найвірогідніше число спізнівшихся з 855 пасажирів.

4.13. Робиться 5 пострілів з ймовірністю влучення в кожному 0,6. . Знайти найвірогідніше число влучень.

4.14. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найвірогідніше число годних було рівне 50, якщо ймовірність того, що навання взята деталь бракована рівна 0,1.

4.15. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань рівна 0,3. Знайти число випробувань n , при яком найвірогідніше число появи події буде дорівнювати 30.

4.16. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 49 незалежних випробувань, якщо найвірогідніше число появи події в цих випробуваннях дорівнює 30?

4.17. Знайти ймовірність того, що число випадань одиниці після 12000 кидків кубика лежить поміж:

г) 1900 і 2150 разів;

д) 1800 і 2100 разів.

4.18. Ймовірність випуску електролампи з дефектом рівна 0,03. Знайти найвірогідніше число бездефектних ламп в партії з 200 штук. Визначити: а) ймовірність найвірогіднішого числа бездефектних ламп; б) ймовірність того, що в цій партії число бездефектних ламп не перевищить десяти.

4.19. Ймовірність правильного спрацювання автомата при опусканні монети дорівнює 0,03. Знайти найвірогідніше число випадків правильного спрацювання автомата при опусканні 150 монет. Визначити ймовірність того, що число випадків правильного спрацювання виявиться: а) рівним 140; б) менше за 140.

4.20. Текст складається з 800 знаків. Ймовірність помилки при наборі будь-якого знаку дорівнює 0,005. Знайти найвірогідніше число зроблених помилок і його ймовірність.

4.21. Підручник виданий тиражем 100000 екземплярів. Для кожного окремого екземпляра ймовірність бути неправильно зброшурованим рівна 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно 5 бракованих підручників.

Тема № 5. Випадкові величини

Випадковою величиною (в.в.) називається величина, яка внаслідок випробування приймає те або інакше невідоме заздалегідь значення.

Для позначення в.в використовують великі літери латинського алфавіту X , Y , Z , а для їх можливих значень – відповідно малі літери x , y , z .

Випадкові величини діляться за типом простору можливих значень на дискретні й неперервні.

5.1 Дискретні випадкові величини

Випадкова величина X називається **дискретною (ДВВ)**, якщо:

- 1) сукупність її можливих значень вдається перерахувати – x_1, x_2, \dots, x_n (или $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$), тобто її значення належать лічильній множині – скінченній або нескінченній;
- 2) можна знайти відповідні ймовірності $p_k = P\{X = x_k\}$ того, що випадкова величина X приймає ці значення.

Закон розподілу – це вичерпна характеристика випадкової величини, зв'язок між можливими значеннями випадкової величини (або конкретними діапазонами значень) і відповідними ймовірностями.

Найбільш простою формою задання закону розподілу є **ряд розподілу** – таблиця, що складається з двох рядків. У першому рядку перераховують всі можливі значення випадкової величини в порядку зростання, а у другому – відповідні ймовірності:

x	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

Оскільки події $\{X = x_k\}, \{X = x_2\}, \dots$ несумісні й утворюють повну групу подій, то

$$\sum_{i=1}^{n(+\infty)} p_i = 1 \quad - \quad \text{умова нормування.} \quad (5.1)$$

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка при кожному своєму аргументі x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X виявиться менше за значенням аргументу x :

$$F(x) = P\{X < x\} \quad (5.2)$$

Властивості функції розподілу:

- 1) $F(x)$ – неспадна функція, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$
- 2) $F(-\infty) = 0$;
- 3) $F(+\infty) = 1$.

Аналітичний запис функції розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sum_{i: x_i < x} p_i, & x > 0. \end{cases}$$

Тобто для дискретних випадкових величин $F(x)$ – **розривна** ступінчаста функція, неперервна зліва.

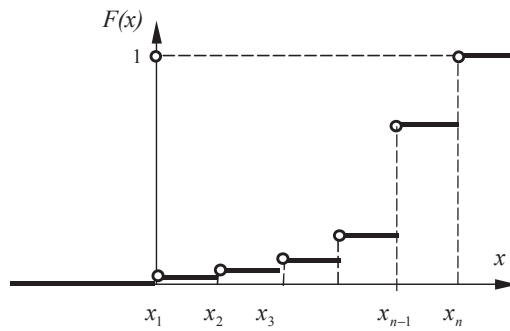


Рис. 5.1

5.2 Неперервні випадкові величини

Випадкова величина X називається **неперервною (НВВ)**, якщо:

- 1) множина її значень співпадає з проміжком (кількома проміжками) числової осі, множина може бути обмеженою або необмеженою;
- 2) ймовірність того, що випадкова величина набуває будь-якого наперед заданого значення x_i , дорівнює нулю.

Зауважимо, що хоча $P\{X = x_i\} = 0$, подія $X = x_i$ є можливою.

Закон розподілу неперервної випадкової величини може бути заданий у вигляді інтегральної функції розподілу (5.2) або щільності розподілу (щільності ймовірності).

При числі діапазонів $n \rightarrow \infty$ дискретна функція розподілу перетворюється в неперервну інтегральну функцію розподілу $F(x)$, зберігаючи всі її властивості.

Функція щільності розподілу ймовірності $f(x)$ являє собою відношення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в малий діапазон $[x, x + \Delta x)$, до довжини цього діапазону Δx :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{X \in [x, x + \Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq X < (x + \Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Щільність розподілу ймовірності є першою похідною від інтегральної функції розподілу:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (5.3)$$

Властивості щільності розподілу:

$$1) f(x) \geq 0; \quad (5.4)$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (5.5)$$

Якщо випадкова величина задана щільністю розподілу, то функцію розподілу можна знайти за фор-мулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (5.6)$$

5.3 Основні числові характеристики

Математичне сповідання дискретної випадкової величини:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i ; \quad (5.7)$$

математичне сповідання неперервної випадкової величини:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx . \quad (5.8)$$

Дисперсія дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i ; \quad (5.9)$$

дисперсія неперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx . \quad (5.10)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} ; \quad (5.11)$$

другий початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i ; \quad (5.12)$$

другий початковий момент неперервної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx . \quad (5.13)$$

В інженерній практиці $D(X)$ визначають за допомогою другого початкового моменту: $D(X) = \alpha_2 - m_x^2$, тобто

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i - M^2(X); \quad \text{для ДВВ}; \quad (5.14)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X); \quad \text{для НВВ}. \quad (5.15)$$

Ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал:

$$P\{X \in [c, d]\} = F(d) - F(c) = \sum_{k=i}^j p_k \quad \text{для ДВВ}; \quad (5.16)$$

$$P\{X \in [c, d]\} = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x) dx \quad \text{для НВВ}. \quad (5.17)$$

Приклад 1. Схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,8. Розглядається випадкова величина X – число насіння, що сходило серед п'яти посіяних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу. Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Знайти математичне сповідання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення σ_x випадкової величини X . Знайти також ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[0; 3,5)$.

Розв'язання. Випадкова величина X може приймати одне з числових значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Визначимо відповідні ним ймовірності. В умовах даної за-

дачі найбільш відповідним способом визначення ймовірностей є формула Бернуллі (11), в якій $n = 5$; $p = 0,8$. Отримаємо відповідні ймовірності: для $x_1 = 0$, $p_1 = 0,00032$; для $x_2 = 1$, $p_2 = 0,0064$; для $x_3 = 2$, $p_3 = 0,0512$; для $x_4 = 3$, $p_4 = 0,2048$; для $x_5 = 4$, $p_5 = 0,4096$; для $x_6 = 5$, $p_6 = 0,32768$.

Шуканий ряд розподілу набуде вигляду:

x	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4086	0,32768

При побудові графіка $F(x)$ вісь абсцис можливими значеннями випадкової величини розбивається на $(n+1)$ діапазон, в кожному з таких діапазонів функції $F(x)$ має постійне значення:

$$x \leq 0; \quad F(X)=0;$$

$$0 < x \leq 1; \quad F(X)=p_1=0,00032;$$

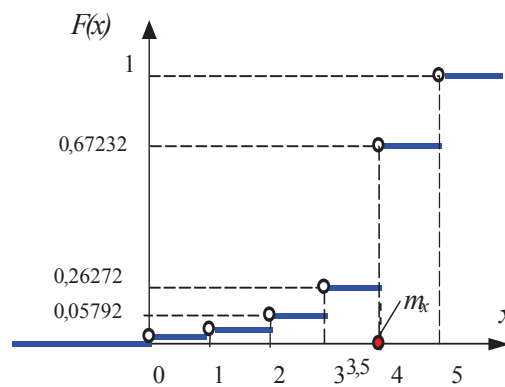
$$1 < x \leq 2; \quad F(X)=p_1+p_2=0,00672;$$

$$2 < x \leq 3; \quad F(X)=\sum_{s=1}^3 p_s = 0,05792;$$

$$3 < x \leq 4; \quad F(X)=\sum_{s=1}^4 p_s = 0,26272;$$

$$4 < x \leq 5; \quad F(X)=\sum_{s=1}^5 p_s = 0,67232;$$

$$x > 5; \quad F(X)=1.$$



Математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини X визначають за формулою (5.7) при $n = 6$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 = \\ = 0 \cdot 0,00032 + 1 \cdot 0,0064 + 2 \cdot 0,0512 + 3 \cdot 0,2048 + 4 \cdot 0,4096 + 5 \cdot 0,32768 = 4.$$

Дисперсія $D(X)$ випадкової величини X визначають за формулою (5.14) при $n = 6$:

$$D(X) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i - m_x^2 = 0^2 \cdot 0,00032 + 1^2 \cdot 0,0064 + 2^2 \cdot 0,0512 + 3^2 \cdot 0,2048 + 4^2 \cdot 0,4096 + \\ + 5^2 \cdot 0,32768 - 4^2 = 0,8.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X визначають за формулою (5.11): $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,8} \approx 0,8944$.

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = -5$ до $x_2 = 2,7$ можна визначити двома способами:

а) $P(0 \leq X < 3,5) = F(3,5) - F(0) = 0,26272 - 0 = 0,26272.$

б) $P(0 \leq X < 3,5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$$= 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 = 0,26272.$$

Приклад 2. Безперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [0; 1]; \\ cx & \text{при } x \in [0; 1]. \end{cases}$ Знайти значення щільності постійною c , інтегральну функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графік щільності розподілу $f(x)$, графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Визначити математичне сповідання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнєквадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(0; 0,5)$.

Розв'язання. Постійна величина c визначається за допомогою властивості щільності розподілу (5.5).

Оскільки задана $f(x)$ – кусочно-неперервна, то розглядається сума інтегралів на проміжках неперервності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 cxdx + \int_1^{\infty} 0 \cdot dx = 0 + \frac{cx^2}{2} \Big|_0^1 + 0 = \frac{c}{2}.$$

Отримуємо рівняння $\frac{c}{2} = 1$, з якого $c = 2$.

Щільність розподілу набуде вигляду: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [0; 1]; \\ 2x & \text{при } x \in [0; 1]. \end{cases}$

Інтегральну функцію розподілу $F(x)$ визначають за формулою (5.6) для кожного проміжка неперервності:

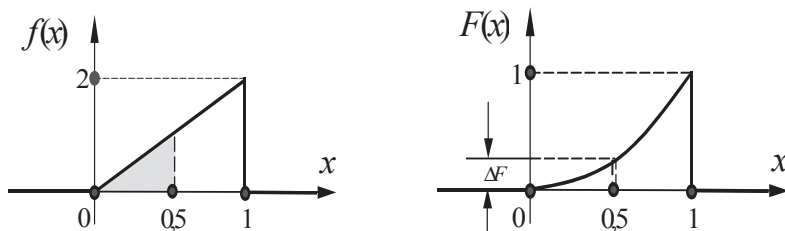
$$\text{при } x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0;$$

$$\text{при } 0 < x \leq 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^x 2tdt = 0 + t^2 \Big|_0^x = x^2;$$

$$\text{при } x > 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0 \cdot dt = 0 + t^2 \Big|_0^1 + 0 = 1.$$

Остаточно отримуємо: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Графіки $f(x)$ і $F(x)$ мають вигляд



Математичне сповідання $M(X)$ визначають за формулою (5.8):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x \cdot 2x dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 + 0 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію $D(X)$ визначають за формулою (5.14):

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0,2357$.

Ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал:

а) $P(0 < X < 0,5) = F(0,5) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}$. На графіку $F(X)$ цієї ймовірності відповідає величина ΔF .

б) $P(-5 < X < 3,5) = \int_{-5}^{3,5} f(x) dx = \int_0^{3,5} 2x dx = x^2 \Big|_0^{3,5} = \frac{1}{4}$. На графіку $f(x)$ цієї ймовірності відповідає площа, виділена сірим фоном.

У теорії ймовірностей числові характеристики відіграють величезну роль. Часто вдається розв'язати прикладні задачі, оперуючи одними числовими характеристиками, залишаючи закон розподілу.

Задачі для самостійного розв'язку.

5.1. Три студенти здають екзамен. Ймовірність здати екзамен для першого студента дорівнює 0,95; для другого – 0,9; для третього – 0,85. Розглядається випадкова величина X – число студентів, які склали екзамен. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[1,5; 3)$.

5.2. З автовокзалу відправилися три автобуси. Ймовірність своєчасного прибуття кожного автобуса в кінцевий пункт відповідно дорівнює 0,7; 0,8; 0,9. Розглядається випадкова величина X – число автобусів, що прибули вчасно. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[1; 2,5)$.

5.3. Баскетболіст кидає м'яч у кошик з ймовірністю попадання при кожному кидку 0,4. Розглядається випадкова величина X – число влучень м'ячем в кошик при трьох кидках. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[1; 3,5)$.

5.4. На шляху руху автомобіля три світлофори. Кожний з них з ймовірністю 0,5 або дозволяє, або забороняє автомобілю подальший рух. Розглядається випадкова величина X – число світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[-1; 1,5)$.

5.5. В урні – п'ять однакових куль з цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Витягують три кулі. Розглядається випадкова величина X – число витягнутих куль з непарними цифрами. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[-1; 2,5)$.

5.6. Є п'ять квитків вартістю 1 гривня, 3 квитки вартістю 3 гривні і 2 квитки вартістю 5 гривень. Вибирають наздогад два квитки. Розглядається випадкова величина X – сумарна вартість вибраних квитків. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[3; 5)$.

5.7. Стрілець, який вражає мішень при одному пострілі з ймовірністю $2/5$, веде вогонь до першого влучення, маючи всього 4 патрони. Розглядається випадкова величина X – число зроблених пострілів. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу і функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал значень $[0,5; 3)$.

5.8. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2; \\ c & \text{при } -2 \leq x \leq 3; \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(-1 \leq X < 3)$.

5.9. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1; \\ (x-1)/c & \text{при } 1 \leq x \leq 3; \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(-0,5 \leq X < 1,5)$.

5.10. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ cx^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(0 \leq X < 1)$.

5.11. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [0; 1]; \\ c(2-x) & \text{при } x \in [0; 1]. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(0 \leq X < 0,5)$.

5.12. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ cx^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити щільність розподілу $f(x)$, побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(0 \leq X < 1)$.

5.13. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ cx & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити щільність розподілу $f(x)$, побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(0,5 \leq X < 1)$.

5.14. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ c(x+1) & \text{при } -1 \leq x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити щільність розподілу $f(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $F(x)$ і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(0,5 \leq X < 1)$.

5.15. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ cx+1 & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти значення постійної величини c . Визначити щільність розподілу $f(x)$, побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$. Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал значень $P(1 \leq X < 2)$.

Тема № 6. Закони розподілу дискретних випадкових величин

6.1 Біноміальний закон розподілу

Нехай робиться n незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю p може відбутися деяка подія A .

Випадкова величина X – число експериментів, у яких відбувається подія A буде розподілена за біноміальним законом розподілу

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad (6.1)$$

з рядом розподілу, що має вигляд

x_i	0	1	...	m	...	n
p_i	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$...	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$...	p^n

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=0}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1.$$

Біноміальний закон розподілу має два параметри:

p – ймовірність появи події A в одному експерименті;

n – загальне число експериментів (випробувань).

Числові характеристики біноміальної випадкової величини

$$M(X) = np. \quad (6.2)$$

$$D(X) = np(1-p). \quad (6.3)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{np(1-p)}. \quad (6.4)$$

Ймовірність влучення дискретної випадкової величини у заданий діапазон значень визначається за допомогою формули

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}. \quad (6.5)$$

Приклад 1. Технічна система складається з 5 вузлів, що функціонують незалежно один від одного. Визначити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення σ_x числа відказів вузлів, якщо ймовірність відказу будь-якого із них $p=0,2$.

Розв'язання. Відкази вузлів – це незалежні події. Ймовірність відказу кожного з них однакова і дорівнює 0,2. Отже, випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. А це значить, що її числові характеристики визначаються за формулами (6.2) – (6.4):

$$M(X) = np = 5 \cdot 0,2 = 1.$$

$$D(X) = np(1-p) = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,8.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0,8} = 0,8944.$$

6.2 Закон розподілу Пуассона

Закон розподілу Пуассона є граничним випадком біноміального розподілу.

Для найпростішого потоку подій випадкова величина X – кількість подій, що потрапили на інтервал T – розподілена за законом Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (6.6)$$

де $a = \lambda T = np$ – середнє число подій, що потрапляють на інтервал T (єдиний параметр закону розподілу);

λ – інтенсивність настання подій (кількість подій в одиницю часу);

T – певний період часу.

Ряд розподілу пуассонівської випадкової величини має вигляд

x_i	0	1	...	m	...
p_i	e^{-a}	$a e^{-a}$...	$(a^m e^{-a})/m!$...

Де сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює одиниці,

тобто

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} e^{-a} = 1.$$

Закон розподілу Пуассона має єдиний параметр:

a – математичне сподівання.

Числові характеристики пуассонівської випадкової величини

$$M(X) = a. \quad (6.7)$$

$$D(X) = a. \quad (6.8)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{a}. \quad (6.9)$$

Для знаходження ймовірності влучення пуассонівської випадкової величини в заданий інтервал застосують дві спеціальні таблиці.

Перша таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення m , тобто ймовірність $P(X=m)$.

Друга таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення, яке менше або рівне m , тобто ймовірність $P\{X \leq m\}$.

Друга таблиця є більш універсальною, тому що дозволяє легко визначати ймовірності:

$$P(X=m) = P\{X \leq m\} - P\{X \leq (m-1)\};$$

$$P\{X \geq m\} = 1 - P\{X \leq (m-1)\};$$

$$P\{m_1 \leq X \leq m_2\} = P\{X \leq m_2\} - P\{X \leq (m_1-1)\}.$$

Приклад 2. Визначити ймовірність того, що на АЗС знаходиться один або принаймні один автомобіль, якщо середнє число автомобілів, яки знаходяться у даний термін часу на АЗС дорівнює 3.

Розв'язання. Ймовірність знаходження одного автомобіля на АЗС:

$$P(X=m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad P(X=1) = \frac{a^1}{1!} e^{-a} = a \cdot e^{-a} = 3 \cdot e^{-3} = 0,149.$$

Ймовірність того, що на АЗС знаходиться принаймні один автомобіль:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a} = 1 - e^{-3} = 0,95.$$

Задачі для самостійного розв'язку.

6.1. Випадкова величина X – кількість блоків, що поступають з ЖБК на будівельний майданчик – розподілена за законом Пуассона. Інтенсивність надходження блоків $\gamma = 2$ *блоки/година*. Знайти ймовірність того, що кількість блоків, що надійшли за 2 години:

а) складе 10 шт.;

б) перевищить 10 шт.;

в) складе менше 10 шт.

6.2. Випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона з математичним сподіванням $a = 3$. Записати функцію розподілу ймовірності випадкової величини X . Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме:

- a)* значення менше, ніж її математичне сподівання;
- б)* позитивне значення.

6.3. Потік заявок, що поступають на телефонну станцію, являє собою найпростіший потік подій. Математичне сподівання числа викликів за годину дорівнює 30. Знайти ймовірність того, що за хвилину надійде не менше двох викликів.

6.4. Пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять рівно 3 елементи.

6.5. Підручник виданий тиражем 100 000 екземплярів. Ймовірність того, що підручник зброшурований неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить 5 бракованих книг.

6.6. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться рівно 4 бракованих.

6.7. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність ушкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде ушкоджено виробів:

- a)* рівно 3;
- б)* менше 3;
- в)* більше 3;
- г)* принаймні один.

6.8 Пристрій складається з великого числа незалежно працюючих елементів з однаковою (дуже малою) ймовірністю відмови кожного елемента за час T . Знайти середнє число елементів, що вийдуть з ладу за час T , якщо ймовірність того, що за цей час відмовить принаймні один елемент, дорівнює 0,98.

Тема № 7. Закони розподілу неперервних випадкових величин

7.1 Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина розподілена за рівномірним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ c, & x \in [a, b]. \end{cases} \quad (7.1)$$

Рівномірний закон розподілу має два параметри: a і b .

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (7.2)$$

Графіки щільність розподілу та інтегральної функції для рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд, наведений на рис.7.1. і рис.7.2.

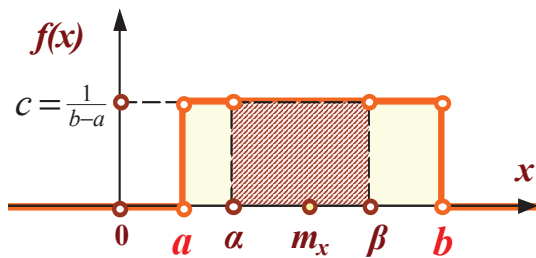


Рис.7.1.

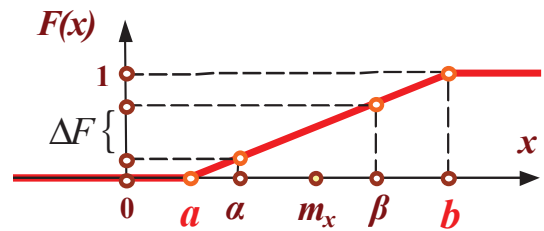


Рис.7.2

Числові характеристики

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad (7.3)$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (7.4)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \quad (7.5)$$

Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон $[\alpha, \beta]$, якщо цей діапазон входить у діапазон $[a, b]$, можна визначити за формулою:

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \quad (7.6)$$

Приклад 1. Тролейбуси прибувають на зупинку кожні 4 хвилини. Визначити ймовірність того, що час очікування тролейбуса не перебільшує 3 хвилини?

Розв'язання.

Так як $[\alpha, \beta] = [0, 3]$ хв., а $[a, b] = [0, 4]$ хв., то $P\{0 \leq X \leq 3\} = \frac{3}{4} = 0,75$.

7.2 Показовий закон розподілу

Неперервна випадкова величина розподілена за показовим законом, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (7.7)$$

де λ – інтенсивність подій, тобто кількість подій в одиницю часу.

Інтегральна функція випадкової величини, розподіленої за показовим законом, визначається виразом

$$F(t) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Графіки щільності розподілу і інтегральної функції для випадкової величини, розподіленої за показовим законом, має вигляд, наведений на рис.7.3., 7.4.

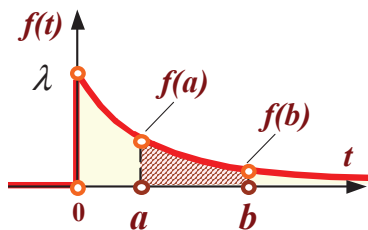


Рис.7.3.

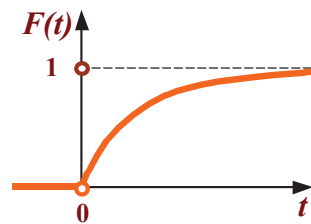


Рис.7.4.

Показовий закон розподілу має тільки один параметр λ .

Числові характеристики

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (7.9)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (7.10)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda} \quad (7.11)$$

Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон $[a, b]$, якщо цей діапазон входить у діапазон $[0, \infty]$, можна визначити за формулою:

$$P\{a \leq X \leq b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (7.12)$$

Приклад 2. Випадкова величина розподілена за показовим законом з параметром $\lambda=2$. Визначити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше за математичне сподівання .

Розв'язання.

Так як $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5$. то

$$P\{X \leq 0,5\} = P\{0 \leq X \leq 0,5\} = e^{-2 \cdot 0} - e^{-2 \cdot 0,5} = 1 - e^{-1} \approx 0,632 .$$

7.3 Нормальний закон розподілу

Неперервна випадкова величина розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.13)$$

де σ і m – параметри розподілу.

Інтегральна функція розподілу визначається виразом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt . \quad (7.14)$$

Графіки щільності розподілу і інтегральної функції для випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, має вигляд, наведений на рис.7.5., 7.6.

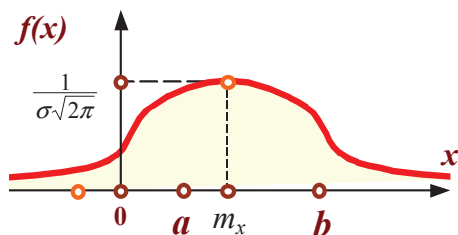


Рис.7.5.

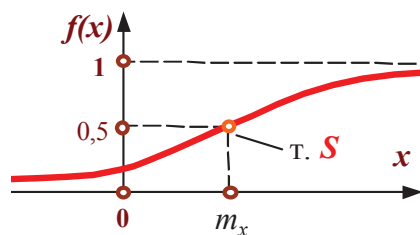


Рис.7.6.

Числові характеристики

$$M(X) = m \quad (7.15)$$

$$D(X) = \sigma^2 \quad (7.16)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sigma \quad (7.17)$$

Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон $[a, b]$ можна визначити за формулою:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (7.18)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (див. Додаток табл.2).

Приклад 3. Середній час обслуговування ПК $\bar{t} = 2$ г. Середнє квадратичне відхилення часу обслуговування дорівнює $\sigma_x = 0,403$ г. Визначити ймовірність завершення обслуговування ПК у термін часу від 1,5 до 2,5 г.

Розв'язання.

Так як $m = 2$, $\sigma = 0,403$, $a = 1,5$ $b = 2,5$, то

$$x_1 = \frac{1,5 - 2}{0,403} = -1,24, \quad x_2 = \frac{2,5 - 2}{0,403} = 1,24, \quad \Phi(x_1) = -0,3925, \quad \Phi(x_2) = 0,3925$$

$$P\{1,5 \leq X \leq 2,5\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,3925 + 0,3925 = 0,785.$$

Задачі для самостійного розв'язку

7.1. Автомобіліст скоює дві спроби з метою подолання дорожньої перешкоди. Ймовірність подолання перешкоди при кожній спробі однакова і рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що в результаті двох спроб перешкода буде подолана принаймні один раз.

7.2. Мале підприємство має 16 автомобілів, що працюють незалежно один від одного. Визначити математичне сповідання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення числа відмов автомобілів, якщо ймовірність відмови будь-якого з них рівна 0,3.

7.3. Число перевірок підприємства протягом року інспекцією є випадковою величиною, що має розподіл Пуассона. Знайти ймовірність того, що на підприємстві буде произведена протягом календарного року одна або хоча б одна перевірка, якщо середнє число перевірок на даному тимчасовому інтервалі $a=4$.

7.4. На підприємстві працює 50 верстатів. Ймовірність відмови кожного з них рівна 0,002. Число відмов – випадкова величина, що має розподіл Пуассона. Визначити ймовірність безвідмовного функціонування всіх верстатів.

7.5. Потяги метрополітену слідуєть через 1,5 хв. Знайти ймовірність того, що час очікування потягу не перевищить 1 хв?

7.6. Середня годинна виручка магазину 100 г. о. Середнє квадратичне відхилення годинної виручки 25 г. о. Годинна виручка є випадкова величина, підлегла нормальному закону розподілу. Знайти ймовірність отримання протягом однієї години виручки у розмірі від 80 до 120 г. о.

7.7. Автобуси прибувають на зупинку через 6 хв. Знайти ймовірність того, що час очікування автобуса не перевищить 5 хв?

7.8. Об'єм продажів товару протягом місяця є випадкова величина, підлегла нормальному закону розподілу з параметрами $\bar{x} = 500$ і $\sigma_x = 120$ г. о.. Знайти ймовірність продажу товару протягом одного місяця на суму від 450 до 600 г. о.

7.9. Підприємство має 5 верстатів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого з них рівна 0,25. Визначити параметри біноміального закону розподілу випадкової величини X – число відмов верстатів.

7.10 Визначте середнє квадратичне відхилення і дисперсію числа відмов автомобілів, якщо випадкова величина X – число відмов автомобілів – задана рядом розподілу:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,2	0,15	0,15	0,1	0,25	0,04	0,06	0,05

ЛІТЕРАТУРА

1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1982
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения – М.: Наука, 1988.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей – М.: Высшая школа, 2000.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 2000.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике– М.: Высшая школа, 2000.
6. Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б. Теорії ймовірностей. Підручник – Харків: ХНАМГ, 2008.

ДОДАТКИ

Таблиця 1. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3032	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0774	0,0759	0,0745	0,0731	0,0718	0,0705	0,0692	0,0680	0,0668
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,00238	0,00231	0,00223	0,0022	0,00216	0,00203	0,00196	0,0019	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00128
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,0011	0,00104	0,0010	0,0010	0,00097	0,00094
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,0002	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2. $\forall |x| > 4, \varphi(x) = 0$.

Таблиця 2. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2086	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2640	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2862
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3061	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3211	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3883	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4665	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4780	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4803	0,4793	0,4798	0,4803	0,4807	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4825	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4861	0,4868	0,4871	0,4875	0,4877	0,4881	0,4884	0,4887	0,4889
2,3	0,4893	0,4895	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4939	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4959	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2 $\forall |x| > 5, \Phi(x) = 0,5$.

Таблиця 2. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,49865	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498929	0,498965	0,498999
3,1	0,49903	0,499065	0,499096	0,499126	0,499153	0,499184	0,499211	0,499238	0,499264	0,499289
3,2	0,49931	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402	0,499423	0,499443	0,499452	0,499481	0,499499
3,3	0,49952	0,499534	0,499549	0,499564	0,499581	0,499596	0,499610	0,499624	0,499638	0,499651
3,4	0,49966	0,499675	0,499687	0,499698	0,499709	0,499719	0,499730	0,499739	0,499749	0,499759
3,5	0,49977	0,499776	0,499784	0,499792	0,499799	0,49981	0,499815	0,499822	0,499828	0,499835
3,6	0,49985	0,499847	0,499853	0,499858	0,499864	0,499869	0,499874	0,499879	0,499883	0,499888
3,7	0,49989	0,499896	0,499900	0,499904	0,499908	0,499912	0,499915	0,499918	0,499922	0,499925
3,8	0,49993	0,499931	0,499933	0,499936	0,499938	0,499941	0,499943	0,499946	0,499948	0,499949
3,9	0,49995	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,49997	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,49976	0,499977	0,499978	0,499978
4,1	0,49998	0,499980	0,499981	0,499982	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985	0,499985	0,499986
4,2	0,49998	0,499987	0,499988	0,499988	0,49989	0,499989	0,499989	0,499990	0,499991	0,499991
4,3	0,49999	0,499992	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994	0,499994	0,499994	0,499994
4,4	0,49999	0,499995	0,99995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,49999	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998	0,499998
5,0	0,4999997									

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 2 $\forall |x| > 5, \Phi(x) = 0,5$.

Таблиця 3. Значення функції Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

	λ							
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606331	0,548812	0,496585	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,3594463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785
3	0,000151	0,001062	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669
5	—	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227
6	—	—	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164
7	—	—	—	—	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019
8	—	—	—	—	—	—	0,000001	0,000002
	λ							
k	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,82085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256513	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,011115	0,015328	0,04067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,1000819	0,132169	0,156293
6	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,000004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	—	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	—	—	0,000004	0,000038	0,000216	0,000810	0,002296	0,005292
11	—	—	—	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	—	—	—	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	—	—	—	—	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	—	—	—	—	—	0,000003	0,000014	0,000056
15	—	—	—	—	—	0,000001	0,000003	0,000015
16	—	—	—	—	—	—	0,000001	0,000004
17	—	—	—	—	—	—	—	0,000001
	λ							
	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	
0	0,011109	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045	
1	0,049990	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454	
2	0,112479	0,083227	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270	
3	0,168718	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007867	
4	0,189808	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917	
5	0,170827	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833	
6	0,128120	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055	
7	0,082363	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079	
8	0,046329	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599	
9	0,023165	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110	
10	0,010424	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110	
11	0,004264	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736	
12	0,001599	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780	
13	0,000554	0,001321	0,005189	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908	

Таблиця 3. Значення функції Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

	λ						
k	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
14	0,000178	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000053	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000015	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021689
17	0,000004	0,000014	0,00018	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000001	0,000004	0,000039	0,000232	0,00009440	0,002893	0,007091
19	—	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	—	—	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	—	—	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	—	—	—	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	—	—	—	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	—	—	—	—	0,000003	0,000016	0,000073
25	—	—	—	—	0,000001	0,000006	0,000029
26	—	—	—	—	—	0,000002	0,000011
27	—	—	—	—	—	0,000001	0,000004
28	—	—	—	—	—	—	0,000001
29	—	—	—	—	—	—	0,000001